1- $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx^2}{1+nx}\, dx = ?$

$x \in [0,1]$ olmak üzere $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$ biçiminde tanımlı (f_n) fonksiyon dizisini alalım.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2}{1+nx} = x = f(x)$$

olup, (f_n) dizisi $f(x)=x$ fonksiyonuna noktasal yakınsaktır. Ayrıca

$$T_n = \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{nx^2}{1+nx} - x \right|$$

$$= \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{nx^2 - x - nx^2}{1+nx} \right|$$

$$= \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{x}{1+nx} \right|$$

yazılır. Eğer $y = \frac{x}{1+nx}$ denirse

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+nx-nx}{(1+nx)^2} = \frac{1}{(1+nx)^2} > 0$$

olduğundan $y = \frac{x}{1+nx}$ monoton artan olup, supremum değerini $x=1$ noktasında alır. Böylece

$$T_n = \sup_{x\in[0,1]} \frac{x}{1+nx} = \frac{1}{1+n}$$

olup $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n} = 0$ olduğundan (f_n) dizisi $f(x)=x$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. O halde (f_n) terim terime integrallenebilirdir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx^2}{1+nx}\, dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2}{1+nx} = \int_0^1 x\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

elde edilir.

2- $[0,1]$ üzerinde $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x+k}{k^2}$ serisinin düzgün yəkınsəklığını ərəştırınız.

Çözüm. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)\frac{x+k}{k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x}{k^2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}$.

$\forall x\in[0,1]$ için $\left|(-1)^k\frac{x}{k^2}\right|\leq\frac{1}{k^2}$ ve $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ serisi yəkınsək ($p=2>1$ olduğundan), o həlde Weierstrass M-testine göre $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x}{k^2}$ düzgün yəkınsəktır.

$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}$ serisinin yəkınsək olduğu biliniyor (Leibniz teoreminden). Bu yəkınsəma x ten bəğımsız olduğuna göre $[0,1]$ de $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x+k}{k^2}$ düzgün yək. olur.